DANIEL SITARU

MATEMATICĂ

PROBLEME DE CONCURS

CLASELE 9-10

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuprins

MOTTO:
Crede în tine!

Enunţuri

1. Să se arate că, dacă $q \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, atunci:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{kq^{k-1}}{1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}} < \frac{2(q^n-1)}{q-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi

$$A = (a\sqrt{ab} + c\sqrt{cd})(b\sqrt{ab} + d\sqrt{cd}); \quad B = (a\sqrt[3]{ab^2} + c\sqrt[3]{cd^2})(b\sqrt[3]{a^2b} + b\sqrt[3]{a^2b}),$$

atunci $A \geq B$.

3. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = x_{n+1}$, atunci:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_1 + x_{i+1}}\right) > n.$$

4. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\sum (x+y)\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq 4\sum x\sqrt{yz}.$$

5. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci:

$$\frac{\sum (x+y)^2}{\sum \sqrt{x+y}} \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

6. Să se afle $x, y, z, t \in (0, \pi)$, astfel încât:

$$\begin{cases} \sin x \cos t + \sin t \cos y + \sin y + \cos z = \dfrac{1}{2} \\ \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

7. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

$$3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq \sum (a^2+b^2-c^2)^2 + 24abc\sqrt[3]{abc}.$$

8. Să se arate că, dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$; $6x+3y+2z = 27+\frac{6}{x}+\frac{12}{y}+\frac{18}{z}$; $xyz = 6$, atunci:

$$\min(x-1, y-2, z-3) \leq 3.$$

9. Să se arate că, dacă $a, b, c, d \in (0, \infty)$, atunci:

$$(ab+cd)^2 \leq (b\sqrt[5]{ab^4}+d\sqrt[5]{cd^4})(a\sqrt[5]{a^4b}+c\sqrt[5]{dc^4}).$$

10. Să se arate că, dacă $x, y, z, t \in (1, \infty)$ și $xyzt = e$, atunci:

$$\ln^2 x \cdot \ln^2 y + \ln^2 z \cdot \ln^2 t \leq \frac{1}{16}.$$

11. Să se arate că numărul C_{4028}^{2014} este divizibil cu 2015.

12. Să se găsească primele 1007 zecimale ale numărului $x = (2+\sqrt{3})^{2014}$.

13. Să se arate că, dacă $x \in [0, 1]$, atunci:

$$2 \leq (\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x + (\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x \leq 2\sqrt{2}.$$

14. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2y^3z^4 = e^{58} \\ \frac{\ln x}{2} = \frac{\ln y}{3} = \frac{\ln z}{4} \end{cases}.$$

15. Fie $A = \{(a,b) \mid 2a^2+2b^2+5ab+2a+b = 6;\ a,b \in \mathbb{Z}\}$. Câte soluții are ecuația:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 ?$$

16. Fie $a, b, c, d \in (1, \infty)$, astfel încât $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{a} \geq \frac{d}{c}$. Să se arate că:

$$\frac{\lg a}{\lg b} \geq \frac{\lg d}{\lg c}.$$

17. Să se arate că:

$$\sqrt{C_n^0 C_n^1} + \sqrt{C_n^1 C_n^2} + \cdots + \sqrt{C_n^{n-1} C_n^n} \leq 2^n - 1;\ n \in \mathbb{N}.$$

18. În câte moduri pot fi stocate 7 fişiere a câte 520 MB pe 4 hard-diskuri având fiecare 2 GB şi astfel încât fiecare hard-disk să conţină cel puţin un fişier?

19. Să se arate că, dacă $a, b, c \in (0, 1)$, atunci:

$$abc \le a^{\sqrt{\log_a b}} \cdot b^{\sqrt{\log_b c}} \cdot c^{\sqrt{\log_c a}}.$$

Generalizare pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, 1)$.

20. Să se arate că, dacă $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, atunci:

$$\frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \frac{1}{\log_x 9 \cdot \log_x 27} + \ldots + \frac{1}{\log_x 3^{2014} \cdot \log_x 3^{2015}} = \frac{2014}{2015}\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^2.$$

21. Să se determine $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$m! + n! + p! + q! = r!.$$

Generalizare: Să se determine $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1} \in \mathbb{N}$, astfel încât:

$$x_1! + x_2! + \ldots + x_p! = x_{p+1}!.$$

22. Să se demonstreze că:

$$C_{14}^{7} + C_{16}^{8} + C_{18}^{9} + \ldots + C_{200}^{100} < 7! + 8! + 9! + \ldots + 100!.$$

23. Să se demonstreze că:

a. $\pi^{\pi} \cdot e^{e} > \pi^{e} \cdot e^{\pi}$;

b. $e^{x-\pi} \cdot \pi^{e-x} > x^{e-\pi}$; $\forall\, x \in [e, \pi]$.

24. Să se rezolve ecuaţia:

$$1^x + 2^x + \ldots + 2015^x = (C_{2016}^{2})^x.$$

25. Să se arate că:

$$\frac{(1+2+3+\ldots+2015)!}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2015!} \in \mathbb{N}^*.$$

26. Să se rezolve ecuaţiile:

a. $\ln^4 x - 10 \cdot \ln^2 x + 9 = 0$;

b. $2\ln^3 x + 3\ln^2 x + 3\ln x + 2 = 0$;

c. $2\ln^4 x + 7\ln^3 x + 9\ln^2 x + 7\ln x + 2 = 0$.

27. Să se rezolve ecuația:

$$\log_2(\log_3 x) + \frac{1}{\log_2(\log_3 x)} = \frac{5}{2}.$$

28. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_i \in \left[\frac{1}{10}, 10\right]; i \in \overline{1,n}$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\lg^2 x_i + x_i^{\lg x_i}}\right) \le 20n.$$

29. Fie lg a, lg b, lg c, lg d; $a, b, c, d \in (1, \infty)$ lungimile laturilor consecutive ale unui patrulater inscriptibil. Să se arate că:

$$\left(\lg\frac{bcd}{a}\right)\left(\lg\frac{acd}{b}\right)\left(\lg\frac{abd}{c}\right)\left(\lg\frac{abc}{d}\right) \le [\lg(ad)\cdot\lg(bc)]^2.$$

30. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=0}^{p} C_p^k A_x^k A_{n-p}^{x-k} = A_n^{2015}.$$

31. Să se arate că în orice triunghi este valabilă relația:

$$2\sum a^2 + 9S\sum\frac{1}{\sin A} \ge \frac{72RS}{p}.$$

32. Fie $a, b \in [0, \infty)$. Să se arate că, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$:

$$a^{\sin x + \sin y}\cdot b^{\cos x + \cos y} \le e^{2\sqrt{\ln^2 a + \ln^2 b}}.$$

33. Fie $x \in (1, \infty)$; $y \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\log_x(x^y - 1)\log_x(x^y + 1)\log_x(x^{2y} + 1)\cdot\ldots\cdot\log_x(x^{2^{n-1}y} + 1) < 2^{n(n+1)}\cdot\left(\frac{y}{n+1}\right)^{n+1}.$$

34. Fie $a \in (1, \infty)$; $b \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\log_a(a^b - 1)\log_a(a^b + 1)\log_a(a^{2b} + 1) < \frac{64}{27}b^3.$$

35. Să se rezolve ecuația:

$$5^{\log_{13} x} + 12^{\log_{13} x} = x.$$

36. Să se arate că, dacă $a, b, c > 0$; $a + b + c \geq 1$, atunci:
$$(a\cdot 8^a + b\cdot 8^b + c\cdot 8^c)(a\cdot 27^a + b\cdot 27^b + c\cdot 27^c) \geq 6.$$

37. Să se determine numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, care verifică relația:
$$3(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) = (2n+1)(a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

38. Fie $A = \ln(\lg x)$ şi $B = \lg(\ln y)$; $x, y \in (e, \infty)$. Să se afle valorile lui x şi y astfel încât:
$$\sqrt{A^2 - 2A + 5} + \sqrt{B^2 - 4B + 29} \leq 7.$$

39. Să se arate că, dacă $a, b \in (0, \infty)$; $abc = 1$, atunci:
$$\sum c(2a\sqrt{a} + 3b^3) + \sum c(3a\sqrt{a} + 4b^4) > 21.$$

40. Să se rezolve ecuația:
$$(\lg x + 1)(\lg x + 2)(\lg x + 3)(\lg x + 4) = -1.$$

41. Să se demonstreze că:
$$\sqrt{\ln 2\cdot \lg 2} + \sqrt{\ln 3\cdot \lg 3} < \sqrt{\ln 7\cdot \lg 7}.$$

42. Să se determine centrul radical al cercurilor de ecuații:
$$C_1 : z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 3 = 0$$
$$C_2 : z\bar{z} + (2-i)z + (2+i)\bar{z} + 1 = 0$$
$$C_3 : z\bar{z} + (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} - 8 = 0.$$

43. Să se arate că ecuația: $x! + 2015! = (x + 2015)!$ nu are soluție.

44. Să se demonstreze că $\lg 2016 < \dfrac{223}{3}$.

45. Să se demonstreze că:
$$10(\ln 605 - \ln 2) > 3\ln 10!.$$

46. Fie $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{\varepsilon}{\bar{\varepsilon}} + \dfrac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}$; $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $z^n + \dfrac{1}{z^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

47. Să se arate că, dacă $x, y, z \in (1, \infty)$, atunci:

$$\lg x \lg y \lg z < \lg^3(x+y+z) .$$

48. Să se arate că în orice triunghi avem relațiile:

$$m_a + m_b + m_c \geq l_a + l_b + l_c \quad \text{și} \quad \frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \geq 3 .$$

49. Numărul diagonalelor unui poligon convex este egal cu numărul punctelor de intersecție a diagonalelor situat în interiorul poligonului. Câte laturi are poligonul?

50. Fie $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$; $z_i \neq z_j$; $(\forall)\, i \neq j$; $i, j \in \overline{1,n}$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$ și $s = z_1 + z_2 + ... + z_n$. Dacă $s - z_i = z_i$; $i \in \overline{1,n}$, să se arate că $s = 0$.

51. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuația:

$$z - 2015 + z - 2016 = 1 .$$

52. Fie A, B, C măsurile, în radiani, ale unghiurilor unui triunghi. Să se arate că:

$$\frac{Ah_a + Bh_b + Ch_c}{h_a + h_b + h_c} \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{Am_a + Bm_b + Cm_c}{m_a + m_b + m_c} \leq \frac{\pi}{3} .$$

53. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| z_i + \frac{1}{z_i} \right|^4 \geq 4n + 8\sum_{i=1}^{n} Re(z_i^2) .$$

54. Să se arate că, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$; $n \geq 2$, avem:

$$6(\sqrt[n]{1!} + \sqrt[n]{2!} + ... + \sqrt[n]{n!}) \leq n^2 + 6n - 1 .$$

55. Să se rezolve ecuația:

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)(k+1)!} = \frac{599}{600} .$$

56. Să se demonstreze că, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{3!!} + \frac{3}{4!!} + \frac{2}{5!!} + \frac{5}{6!!} + ... + \frac{n}{(2n+1)!!} + \frac{2n+1}{(2n+2)!!} < 1 .$$

57. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$1-\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k!}(k+1+\sqrt{k+1})}=\frac{1}{12\sqrt{5}}.$$

58. Într-o progresie aritmetică, $a_1 = 2$; $a_2 = 502$. Aflați cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât scrierea lui a_k să înceapă cu cifra 9.

59. Într-o progresie aritmetică, $a_1 = p;\ a_2 = q;\ p, q \in \mathbb{N}^*;\ q > p$. Aflați $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât scrierea lui a_k să înceapă cu cifra 9.

60. Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$(xyz)^{xyz} < 3^{xyz} \cdot (xyz)!.$$

61. Să se arate că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\log_2[mn(C_{2m}^{m}C_{2n}^{n})^2] > 2(2m+2n-1).$$

62. Fie $H=\left\{z \mid z=a+b\varepsilon+c\varepsilon^2;\ a,b,c\in\mathbb{R};\ a,b,c\in\mathbb{R};\ \varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$. Să se arate că, dacă $z \in H$, atunci $z^{2015} \in H$.

63. Fie $a \in \mathbb{N}^*$; $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

$$\sqrt{a}\left[(1+\sqrt{a})^{2n}-(1-\sqrt{a})^{2n}\right]\in\mathbb{N}.$$

64. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se arate că:

$$\sum_{cyc}\sqrt[3]{2x} \geq 6\sum_{cyc}\frac{x}{2+3x}.$$

65. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$\pi(h_a+h_b+h_c) \geq 9p.$$

66. Să se arate că în orice triunghi este adevărată relația:

$$\pi(am_a+bm_b+cm_c) \geq 2p^2.$$

Soluţii

1. Din inegalitatea Kurliancik:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}}<2\sum_{k=1}^{n}a_k;\ a_1,a_2,\ldots,a_n>0,$$

deducem, pentru $a_k=q^{k-1}; k\geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\ldots+\frac{1}{q^{k-1}}}<2\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\frac{\frac{1}{q^k}-1}{\frac{1}{q}-1}}<\frac{2(q^n-1)}{q-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\left(\frac{1}{q}-1\right)}{\frac{1}{q^k-1}}<\frac{2(q^n-1)}{q-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kq^{k-1}(q-1)}{q^k-1}<\frac{2(q^n-1)}{q-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{kq^{k-1}}{1+q+q^2+\ldots+q^{k-1}}<\frac{2(q^n-1)}{q-1}.$$

2. Vom folosi inegalitatea Callebaut:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1+x}b_i^{1-x}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1-x}b_i^{1+x}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1+y}b_i^{1-y}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{1-y}b_i^{1+y}\right)$$

pentru $1\geq x\geq y\geq 0$; $a_i,b_i>0$; $i\in\overline{1,n}$, în care $n=2$; $x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{3}$; $a_1=a$, $a_2=b$, $b_1=$ $=c$; $b_2=d$.

$$(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}d^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{3}{2}})\geq(a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{4}{3}}d^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{2}{3}}d^{\frac{4}{3}})$$

$$(\sqrt{a^3b}+\sqrt{c^3d})(\sqrt{ab^3}+\sqrt{cd^3})\geq(\sqrt[3]{a^4b^2}+\sqrt[3]{c^4d^4})(\sqrt[3]{a^2b^4}+\sqrt[3]{a^2b^4})$$

$$(a\sqrt{ab}+c\sqrt{cd})(b\sqrt{ab}+d\sqrt{cd})\geq(a\sqrt[3]{ab^2}+c\sqrt[3]{cd^2})(b\sqrt[3]{a^2b}+b\sqrt[3]{a^2b}).$$

3. Inegalitatea se scrie:

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_{i+1}}$$

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \underbrace{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \ldots + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}_{\text{de } n \text{ ori}} < \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_n + x_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_{i+1}} <$$

$$< \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \frac{1}{x_n + x_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i + x_{i+1}}.$$

4. Notăm $\sqrt{x+y} = a; \sqrt{y+z} = b; \sqrt{z+x} = c$.

Din inegalitatea Muirhead:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 b + b^3 c + c^3 a) \geq 2(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2).$$

Reținem:

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2$$

$$\sum a^3 b \geq \sum a^2 b^2$$

$$\sum (x+y)\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq \sum (x+y)(y+z) \geq$$

$$\geq \sum 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} = 4\sum y\sqrt{xz} = 4\sum x\sqrt{yz}.$$

5. Notăm $\sqrt{x+y} = a; \sqrt{y+z} = b; \sqrt{z+x} = c$.

Inegalitatea se scrie:

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a+b+c} \geq abc$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c).$$

Dar

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2 \geq abc(a+b+c).$$

În inegalitatea Muirhead sistemul (4, 0, 0) majorează sistemul (2, 2, 0), care majorează sistemul (2, 1, 1).

6.

$$2 \sin x \cos y \leq \sin^2 x \cos^2 y$$

$$2 \sin y \cos z \leq \sin^2 y \cos^2 x$$

$$2 \sin z \cos x \leq \sin^2 z \cos^2 x$$

$$2(\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x) \leq 3$$

$$\sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x \leq \frac{3}{2}.$$

Maximul se atinge pentru $x = y = z = \frac{\pi}{4}$.

Prima ecuație se scrie: $\sin\frac{\pi}{4}\cos t+\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t+\sin t)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\sin t+\cos t=0$$
$$\operatorname{tg} t=-1$$
$$t=\frac{3\pi}{4}$$

Soluție: $\begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \\ y=\frac{\pi}{4} \\ z=\frac{\pi}{4} \\ t=\frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

7.

$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+4b^2c^2+4a^2c^2$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2-a^2)^2+4a^2b^2+4a^2c^2$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2=(c^2+a^2-b^2)^2+4a^2b^2+4b^2c^2$$
$$3(a^2+b^2+c^2)^2=\sum(a^2+b^2-c^2)^2+8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq$$
$$\geq\sum(a^2+b^2-c^2)^2+8\cdot 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=$$
$$=\sum(a^2+b^2-c^2)^2+24abc\sqrt[3]{abc}.$$

8.

$$(x-1)(y-2)(z-3)=(xy-2x-y+2)(z-3)=$$
$$=xyz-3xy-2xz+6x-yz+3y+2z-6=$$
$$=6-\frac{18}{z}-\frac{12}{y}-\frac{6}{x}+6x+3y+2z-6=$$
$$=6x+3y+2z-\left(\frac{18}{z}+\frac{12}{y}+\frac{6}{x}\right)=27$$
$$\min(x-1,y-2,z-3)\leq\sqrt[3]{(x-1)(y-2)(z-3)}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$$
$$\min(x-1,y-2,z-3)\leq 3.$$

9.
$$(ab+cd)^2=\left(\sqrt[10]{(ab^9)(a^9b)}+\sqrt[10]{(cd^9)(c^9d)}\right)^2$$

Din inegalitatea Cauchy–Schwarz:

$$\left(\sqrt[10]{(ab^9)(a^9b)}+\sqrt[10]{(cd^9)(dc^9)}\right)^2\le\left(\left(\sqrt[10]{ab^9}\right)^2+\left(\sqrt[10]{cd^9}\right)^2\right).\left(\left(\sqrt[10]{a^9b}\right)^2+\left(\sqrt[10]{dc^9}\right)\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt[5]{ab^9}+\sqrt[5]{cd^9}\right)\left(\sqrt[5]{a^9b}+\sqrt[5]{dc^9}\right)=\left(b\sqrt[5]{ab^4}+d\sqrt[5]{cd^4}\right)\left(a\sqrt[5]{a^4b}+c\sqrt[5]{dc^4}\right)=$$
$$=\left(b\sqrt[5]{ab^4}+d\sqrt[5]{cd^4}\right)\left(a\sqrt[5]{a^4b}+c\sqrt[5]{dc^4}\right).$$

10.
$$xyzt=e\Rightarrow \ln x+\ln y+\ln z+\ln t=1$$
$$\ln^2 x\cdot\ln^2 y+\ln^2 z\cdot\ln^2 t\le(\ln^2 x+\ln^2 z)(\ln^2 y+\ln^2 t)\le$$
$$\le(\ln x+\ln z)^2(\ln y+\ln t)^2\le\left[\frac{(\ln x+\ln z)+(\ln y+\ln t)}{2}\right]^2=\frac{1}{16}.$$

11.
$$\frac{C_{4028}^{2014}}{2015}=\frac{\frac{4028!}{2014!}}{2014!2015}=\frac{4028!}{2014!2015}=\frac{4028!}{2014!2013!}\left(\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}\right)=$$
$$=C_{4028}^{2014}-C_{4028}^{2013}\in\mathbb{Z}.$$

Rezultă:

$$\frac{C_{4028}^{2014}}{2015}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2015\mid C_{4028}^{2014}.$$

12.
$$x=(2+\sqrt{3})^{2014}=(7+4\sqrt{3})^{1007}=p+q\sqrt{3};\ p,q\in\mathbb{N}.$$

Rezultă:

$$(2-\sqrt{3})^{2014}=p-q\sqrt{3}.$$
$$0<(2-\sqrt{3})^{2014}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2014}}=\frac{1}{(7+4\sqrt{3})^{1007}}<\frac{1}{10^{1007}}$$
$$x+(2-\sqrt{3})^{2014}=2p$$
$$0<2p-x<\frac{1}{10^{1007}}$$
$$-\frac{1}{10^{1007}}<x-2p<0$$
$$2p-\frac{1}{10^{1007}}<x<2p.$$

Rezultă că primele 1007 zecimale ale lui x sunt egale cu 9.

13. Din inegalitatea mediilor:

$$(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x+(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x\geq$$

$$\geq 2\sqrt{(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x}=2.$$

A doua inegalitate se scrie succesiv:

$$(\sqrt{2}-1)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x+(\sqrt{2}+1)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x\leq(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)$$

$$(\sqrt{2}-1)\left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^x-1\right]+(\sqrt{2}+1)\left[\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^x-1\right]\leq 0$$

$$\left[(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}-1)^x\right]\left[(\sqrt{2}+1)^{1-x}-(\sqrt{2}-1)^{1-x}\right]\geq 0$$

Relația este adevărată deoarece $x\in[0,1]\Rightarrow -x\in[0,1]\Rightarrow 1-x\in[0,1]$.

14.

$$\frac{\ln x}{2}=\frac{\ln y}{3}=\frac{\ln z}{4}=k$$

$$x=2^{2k};y=e^{3k};z=e^{4k}$$

$$e^{4k+9k+16k}=e^{58}$$

$$29k=58\Rightarrow k=2\Rightarrow x=e^4;y=e^6;z=e^8.$$

15.

$$2a^2+2b^2+5ab+2a+b=6\Leftrightarrow(2a+b)(a+2b+1)=6$$

cu soluțiile: $(a,b)\in\{(-1,3);(4,-2);(-1,-1);(0,-2)\}$. Rezultă card A = 4.

Dacă $(a, b) \in A$, atunci (a, b) apare în cel puțin una din mulțimile A_i, $i\in\overline{1,4}$. Indicii mulțimilor A_i, $i\in\overline{1,4}$ care conțin pe (a, b) formează o submulțime a lui $\{1, 2, 3, 4\}$. Rezultă că sunt $2^4 - 1 = 15$ moduri în care (a, b) poate aparține cel puțin unei mulțimi A_i, $i\in\overline{1,4}$. Deoarece fiecare element $(a, b) \in A$ aparține cel puțin unei mulțimi A_i, $i\in\overline{1,4}$, rezultă că ecuația are 15^4 soluții.

16.

$$\frac{a}{b}\geq\frac{c}{a}\Rightarrow a^2\geq bc\Rightarrow 2\lg a\geq\lg(bc)=\lg b+\lg c\geq 2\sqrt{\lg b\lg c}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lg a\geq\sqrt{\lg a\lg c}\Rightarrow\lg^2 a\geq\lg a\lg c\Rightarrow\frac{\lg a}{\lg b}\geq\frac{\lg c}{\lg a}. \qquad (1)$$

Analog, din:

$$\frac{c}{a}\geq\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{\lg c}{\lg a}\geq\frac{\lg d}{\lg c}. \qquad (2)$$